RESUMEN DE SERIES Y SUCESIONES.

1.- SERIE ***GEOMETRICA***

$$\sum_{n=1}^{\infty} a.r^{n-1} \qquad S = \frac{a}{1-r}$$

i.- Si $|r| < 1$, la serie converge.

ii.- Si $|r| > 1$, la serie diverge.

2.- SERIE ***ARMONICA***

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad i.-)\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

La serie diverge.

3.- SERIE ***"p"***

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$$

i.- Si $p > 1$, la serie converge.

ii.- Si $p \leq 1$, la serie diverge.

4.- SERIE ***TELESCOPICA.***

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \textbf{fracciones simples}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

Observe que: $a_1 = 1 - \frac{1}{2}$ $\quad a_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ $\quad a_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ $\quad a_4 = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$

se determina una nueva expresion para la serie $= S_N = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$, se toma límite para determinar si es convergente o divergente. Si el límite es finito (converge) de otro modo diverge.

SERIES.

1.- Criterio del n-esimo termino.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Converge $=>$ $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ó $\lim_{n\to\infty} a_n$ no existe entonces serie diverge.

SERIES POSITIVAS.

2.- COMPARACION TÉRMINO A TÉRMINO.

Sea $0 \leq a_n \leq b_n$

i.-Si$\sum b_n$converge, entonces $\sum a_n$tambien converge.

ii.- Si $\sum a_n$ diverge, entonces $\sum b_n$ también diverge.

3.- COMPARACION DEL LÍMITE.

$$Sea\ \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \quad con\ \ b_n \neq 0$$

i.- Si $0 < L < \infty$ entonces $\sum a_n$ y $\sum b_n$ se comportan iguales.

ii.- Si $L = 0$ y $\sum b_n$ converge, entonces $\sum a_n$ converge.

4.-CRITERIO DE LA SUMA ACOTADA.

Serie a términos $(+)$ converge, entonces la sucesión es acotada.

$S_{n+1} = S_n + S_{n-1}$

$(*)$ $S_{n+1} - S_n \leq 0$
$\{S_n\}$ $Monotona\ decreciente.$

5.- CRITERIO DE LA INTEGRAL.

Sea f una función $\begin{cases} i.-continua \\ ii.-positiva \\ iii.-No\ creciente \end{cases}$ y suponga que $a_k = f(x)$ entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \ converge \ <=> \int_1^{\infty} f(x)dx \ (converge).$$

6.- CRITERIO DEL COCIENTE.

Sea $\sum a_n$ términos $(+)$, entonces se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p$$

i.- Si $p < 1$, converge.

ii.- Si $p > 1$, serie diverge.

iii.- Si $p = 1$ No es concluyente el criterio.

7.- CRITERIO DE LA RAIZ N-ESIMA.

$$Si \ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a_n^{\frac{1}{n}} \ existe\ y\ vale \ \ L$$

i.- Si $L < 1$la serie converge.

ii.- Si $L > 1$ la serie diverge.

iii.- Si $L = 1$ NO es concluyente el criterio.

8.- CRITERIO DE LAS SERIES ALTERNANTES,

Si $\{|a_n|\}$ es $\begin{cases} monotona\ decreciente \\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \end{cases}$ entonces la serie converge.

Además $|S - S_n| \leq |a_{n+1}|$

Observe: $a_{n+1} - a_n > 0$ Monótona creciente.

$a_{n+1} - a_n < 0$ Monótona decreciente.

Criterio de convergencia absoluta.

Si $\sum a_n$ "converge absolutamente" si $\sum |a_n|$ converge.

Una serie $\sum a_n$ "converge condicionalmente" si $\sum a_n$ converge pero $\sum |a_n|$ diverge.

Criterio de Cociente Absoluto

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = p$$

i.- Si $p < 1$, converge.

ii.- Si $p > 1$, serie diverge.

iii.- Si $p = 1$ No es concluyente el criterio.

CONJUNTO DE CONVERGENCIA.

Aplicar el criterio de la razón, razonando que el limite debe ser menor que 1 para que converja, y además se debe evaluar en los puntos de cortes.

OPERACIONES CON SERIES DE POTENCIA.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = S_n \quad con \quad \begin{cases} intervalo\ de\ convergencia \\ diferente\ de\ 0 \end{cases}$$

(Derivada) i.- $\sum n a_n x^{n-1}$ converge, y suma será $S'(x)$

(Integral) ii.- $\sum \frac{a_n t^{n+1}}{n+1}$ converge, y suma será $\int_0^t S(x)dx$

Si se aplica derivada o integración el radio de convergencia no se modifica.

SERIES DE MacLaurin

$$a.- \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n}$$ [1]

$$b.- \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n}}{n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$ [2]

$$c.- \arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$d.- e^{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n}}{n!}$$

$$e.- \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$f.- \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{x^{2n}}{2n!}$$

$$g.- \sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$h.- \cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$i.- \operatorname{arctanh}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

NOTA: El desarrollo en serie de MacLaurin de $\tan(x)$; $\tanh(x)$ se encuentran en la literatura pero no se listan ya que contienen nuevas definiciones de números funcionales como el numero de Bernoulli.

Elaborado por Miguel Guzmán

ACTUALIZADO: NOVIEMBRE 2011

Cualquier error o comentario enviar e-mail a **magt_123@hotmail.com**

[1] **IMPORTANTE ¡¡¡¡¡¡¡¡¡** OBSERVE QUE SON IGUALES LAS SERIES LA VARIACION OCURRE EN EL NUMERO DE INICIO

[2] Idem